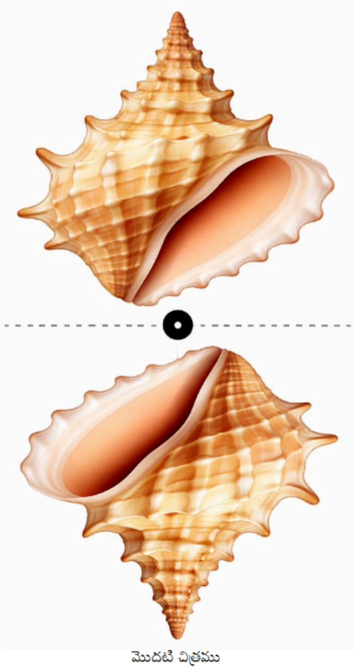
సౌష్ఠవము – 2

శ్రీ జెజ్జాల కృష్ణ మోహన రావు

పరిచయము: ఈవ్యాసములో నేను సౌష్ఠవపు మూలాంకములను (symmetry elements) గుఱించి చర్చిస్తాను. అవి (1) స్థలాంతర లేక స్థానాంతర పరివర్తన సౌష్ఠవము (translation symmetry), (2) విలోమ సౌష్ఠవము (inversion symmetry), (3) భ్రమణ సౌష్ఠవము (rotation symmetry), (4) దర్పణ సౌష్ఠవము (mirror symmetry).

(1) స్థలాంతర లేక స్థానాంతర పరివర్తన సౌష్ఠవము: ఒక వస్తువు లేక రూపము పదేపదే ఒక నియమితమైన దూరములో ఉన్నప్పుడు ఇది సంభవిస్తుంది. ఇది ఒక మైలురాయి వంటిది. మైలురాళ్ల మధ్య నియమితమైన దూరము ఒక మైలు. అలాగే దేవాలయ మంటపములలో స్థంభములకు మధ్య దూరము కొన్ని అడుగులు ఉంటుంది. సైన్యములో కవాతు చేసే సైనికులు ఒకరి వెనక మరొకరు ఒక నిర్ణీత దూరములో నిలిచి ఉండుట కూడ ఇట్టి స్థలాంతర పరివర్తనమే. వాళ్ల మధ్య దూరము బహుశా మూడడుగులు ఉండవచ్చును. వాళ్లు ఒక్కొక్కప్పుడు ఐదాఱుగురు బారులుగా నడుస్తుంటారు. ఇక్కడ రెండు దిశలలో స్థలాంతరము గలదు: ఒకరి వెనక ఒకరికి, ఒకరి పక్కన ఒకరికి. దేవాలయములోని స్తంభాలు, మైలు రాళ్లు అనంతము కావు. వాటిని మనం లెక్క పెట్టవచ్చును. అవి చిన్న సంఖ్యయే. కాని స్ఫటికములలో ఇది 10^{23} ! ఉదాహరణముగా మనము సామాన్యముగా వాడే ఉప్పు (Sodium Chloride) స్ఫటిక రూపములో ఉన్నప్పుడు ఒక సెంటీమీటర్ పరిమాణపు ఉప్పులో సుమారు ఇరవై మిల్లియనుల స్థలాంతర పరిమితులు ఉంటాయి. ఉప్పులో ఇది మూడు దిశలలో అనగా x, y, z దిశలలో ఉంటాయి.

(2) విలోమ సౌష్ఠవము: విలోమము అంటే తలక్రిందులవడము. అనగా ఒక వస్తువు లేక ఒక ఆకృతి పూర్తిగా తలక్రిందులవుతుంది. అనగా అందులోని ప్రతి బిందువు యొక్క **నిర్దేశాంకములు** (coordinates) x, y, z ఈ విలోమము ద్వారా -x , -y , -z అవుతాయి. ఈమూడు **ఋణ చిహ్నాల** (minus signs) గుణకార లబ్ధము (product) -1 . -1 . -1 = -1 అవుతుంది. x ,y , z లకు ఇట్టి గుణకార లబ్ధము 1 . 1 . 1 = 1. ఈ విలోమ సౌష్ఠవ ప్రయోగము వలన మనము మొదట తీసికొన్న ఆకారపు హస్తతత్వము (handedness) మాఱుతుంది. అనగా కుడి యెడమలు మారిపోతాయి. **మొదటి చిత్రములో** ఒక శంఖము, విలోమ సౌష్ఠవ ప్రయోగము ద్వారా కలిగిన దాని ప్రతిరూపము చూపబడినది. విలోమకేంద్ర బిందువును కూడ చూడండి. బిందువు పరిమాణము శూన్యము (zero).

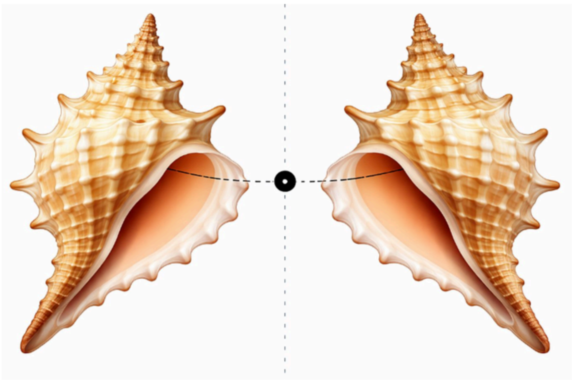


మొదటి చిత్రము

(3) భ్రమణ సౌష్ఠవము: భ్రమణము అనగా తిరగడము, త్రిప్పడము. అనగా ఒక వస్తువు లేక ఆకృతి ఒక **నిర్దిష్టమైన కోణము** (particular angle) ద్వారా ఒక **అక్షము** (axis) చుట్టు తిరుగుతుంది. ఈ అక్షము ఒక రేఖ లేక గీత. దీని పరిమాణము ఒకటి. ఒక బిందువు యొక్క నిర్దేశాంకములు x, y, z అనుకొందాము. దానిని z-అక్షము చుట్టు 180 డిగ్రీలు తిప్పితే దాని నిర్దేశాంకములు - x,- y, z అవుతుంది. దీనికి గుణకార లబ్ధము -1 . -1 . 1 = 1. అనగా భ్రమణ సౌష్ఠవము ద్వారా హస్తతత్త్వము మారదు. మొదట తీసికొన్న ఆకారపు హస్తతత్త్వము లేక కుడి ఎడమలు ఈ భ్రమణ సౌష్ఠవ ప్రయోగము ద్వారా మారదు. ఇది చాల ముఖ్యమైన అంశము. హస్తతత్త్వము ఉండే హీమోగ్లోబిను, ఇన్సులిను వంటి ప్రోటీనుల స్ఫటిక రూపములకు, డిఎన్ఏ వంటి జన్యుకణముల స్ఫటిక రూపములకు ఎల్లప్పుడూ భ్రమణ సౌష్ఠవము మాత్రమే ఉండును. విలోమ సౌష్ఠవము గానీ, దర్పణ సౌష్ఠవము గానీ ఉండదు.

రెండవ చిత్రములో 180 డిగ్రీలతో చుట్టిన శంఖమును చూడ వీలగును. ఇందులో నిలువు గీత y అక్షము, దానికి లంబముగా కాగితములో x అక్షము, కాగితమునకు లంబముగా మన వైపు వస్తున్నట్లుగా z అక్షము. ఇప్పుడు y అక్షము చుట్టూ 180 డిగ్రీల భ్రమణము చేస్తే, ఆ భ్రమణము వలన y నిర్దేశ అంకము (y coordinate) మారదు.

(x , z) => (-x , -z) అవుతుంది.

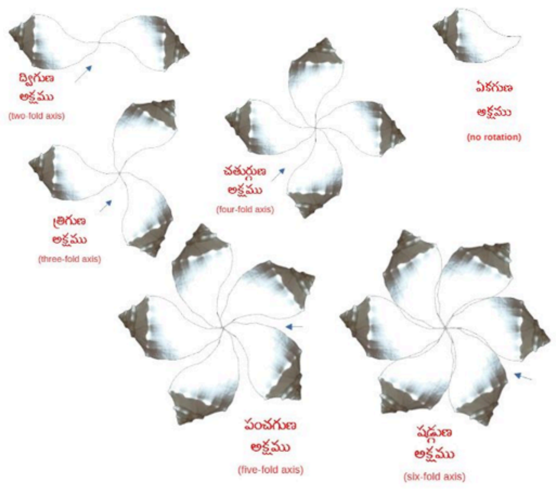


రెండవ చిత్రము

భ్రమణమునకు కావలసినవి రెండు; అవి: (1) **భ్రమణ అక్షము** (rotation axis), (2) **భ్రమణ కోణపు విలువ** (angle of rotation). ఒక రూపమును తీసుకొని, ఒక అక్షము చుట్టూ భ్రమణ కోణమంత తిప్పినప్పుడు (భ్రమణము), ఒక ఆకారం వస్తుంది. ఆ రూపానికి ఉన్న ఆకారముల సంఖ్య ఆ **అక్షపు మడతను** (fold) తెలుపుతుంది. 60 డిగ్రీల భ్రమణ కోణానికి అక్షపు మడత విలువ 360/60 = 6 అవుతుంది. ఒకవేళ భ్రమణ కోణం 180 డిగ్రీలయితే, అప్పుడు అక్షపు మడత విలువ 360/180 = 2 అవుతుంది. అదే విధంగా, అక్షపు మడత విలువ 4 కావాలనుకుంటే, 360 సంఖ్యను అక్షపు మడత విలువతో భాగహారము చేసినప్పుడు మనకు భ్రమణ కోణపు విలువ లభిస్తుంది. ఆకోణముతో 360 డిగ్రీలు చేరేవఱకు ఆ ఆకారమును తిప్పుతూ ఉండాలి. రెండు మడతల అక్షానికి ద్విగుణ అక్షమని పేరు. అలాగే, మూడు మడతలకు త్రిగుణ. అలాగే, చతుర్గుణ, పంచగుణ, షడ్గుణ, సప్తగుణ , అష్టగుణ అక్షములు.

ఉదాహరణముగా ఒక రూపమును లేదా వస్తువును షడ్గుణ-అక్షము (360/6 = 60) ద్వారా తిప్పవలెనని అనుకొంటే మనము ముందు 60 డిగ్రీలు తిప్పాలి, తర్వాత 60, ఇలా తిప్పుకుంటూ 360 వచ్చేదాకా 6 సార్లు తిప్పాలి. ఇలా చేసినప్పుడు ఇందులో 120, 180 వగైరా డిగ్రీల భ్రమణములు అనగా ద్విగుణ-అక్షము, త్రిగుణ-అక్షములు కూడ ఉన్నాయని గమనించాలి.

మూడవ చిత్రములో ఒక శంఖమును తీసికొని దానిని 1 నుండి 6 వఱకు గల భ్రమణాక్షములకు జనించిన ఆకృతులను చూపినాను. ప్రకృతిలో నాలుగు, ఐదు, ఆఱు రేకుల పూవులను చూస్తుంటాము. ఎనిమిది చేతులు ఉండే జలచరము **అష్టపది** కి (octopus), పూజలలో ఉపయోగించే చక్రములలో కూడ ఇటువంటి సౌష్ఠవము ఉన్నది. పరిశీలించండి.



మూడవ చిత్రము

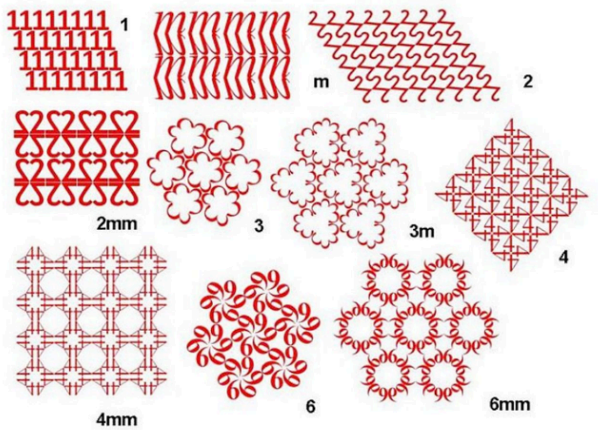
(4) దర్పణ సౌష్ఠవము: దర్పణము అంటే అద్దము. ఒక వస్తువు లేక ఆకృతి, దాని ప్రతిబింబము రెండు ఒకే చోట ఉంటే అప్పుడు వాటికి దర్పణ సాదృశ్యము ఉన్నదని అంటాము. మనము నిత్యము తల దువ్వుకొనేటప్పుడు చూచే అద్దము కాదిది. అందులోని ప్రతిబింబము నిజమైనది కాదు. ఈదర్పణ సౌష్ఠవమునందలి బింబ ప్రతిబింబాలు రెండు నిజమైనవే. అందువలన అక్కడ అద్దములాటిది ఉందని భావిస్తాము. ఈ దర్పణము ఒక **తలము**పైన (plane or surface) ఉంటుంది. అది దర్పణ తలము. దీని పరిమాణము రెండు. ఒక దర్పణము xy-తలములో ఉన్నదనుకొందాము. దాని ముందు ఉన్న వస్తువునకు, దాని ప్రతిబింబమునకు ఉండే తేడా z నిర్దేశాంకములో మాత్రమే. రెండింటికి x, y లు ఒక్కటే. అనగా బింబ ప్రతి బింబముల నిర్దేశాంకములు ఈవిధముగా మారుతాయి. (x, y, z) => (x, y,- z). (x, y, -z) కు గుణకార లబ్ధము 1 . 1 . -1 = -1. విలోమ ప్రయోగము వలెనే ఇక్కడ కూడ హస్తతత్వము మారినది. అనగా కుడి యెడమ అయినది, ఎడమ కుడి ఐనది.

నాలుగవ చిత్రములో నా దగ్గర ఉండే **శంఖము**లతో (conch) ఈ దర్పణ సాదృశ్యమును చూపినాను. ఇందులో చిత్రము పైన ఎడమ భాగములో నిలువుగా వీటిని చూపినాను. కుడి భాగములో ఆ శంఖములను పడుకోబెట్టి, వెనుక నుండి చూచుచున్నట్లుగా అమర్చినాను. క్రింది చిత్రములో అవి శంఖ ద్వారములు క్రింద ఉండేటట్లు చూపబడినవి. మూడు చిత్రాలలో ఎడమవైపు ఉండు శంఖమును sinistral లేక **దక్షిణావర్తము** అంటారు. కుడివైపు ఉండు శంఖమును dextral లేక **ఉత్తరావర్తము** అంటారు. ప్రకృతిలో సామాన్యముగా ఉత్తరావర్త లేక dextral శంఖములే ఎక్కువ (99%). దక్షిణావర్త శంఖములు లేక వలమురి శంఖములు చాల అరుదు. అందుకే వాటిని పవిత్రమైన చోటులలో, పూజలలో, దేవాలయములలో వాడుతారు.

Sinistral (దక్షిణావర్త) and dextral (ఉత్తరావర్త) versions of a conch

నాలుగవ చిత్రము

ఐదవ చిత్రములో 1, 2, 3, 4, 6 గుణాంకముల అక్షముల అమరికను సమతల పరిమాణమునకు సరిపోయేటట్లు చూపినాను. ఇందులోని ముఖ్యాంశము ఏమనగా, అక్షపు మడతల విలువ సంఖ్యనే దానిని వివరించుటకు ఉపయోగించినాను. చిత్రములో m అంటే mirror లేక దర్పణము అని అర్థము.



ఐదవ చిత్రము

ఈ చిత్రములోని వివరములను రాబోయే వ్యాసములో చర్చిస్తాను.

గడచిన సంచికలో అడిగిన ప్రశ్నలకు జవాబులు: అందులోని రెండవ చిత్రములోని కుడి భాగమునకు దర్పణ సాదృశ్యము గలదు. తొమ్మిదవ చిత్రములో ఎడమ భాగములో ఉండే సౌష్ఠవము కేవలము **స్థలాంతర పరివర్తనము** (translation)

మాత్రమే. అందులో ఒక చిత్రము ఏమంటే ఏచోటు కూడ ఖాళీ లేదు. ఇట్టి చిత్రములను tessellations అంటారు. tessellation కు నా తెలుగు అనువాదము సంపూర్ణ ఆచ్ఛాదిత సమతలము. అనగా సమతలమంతయు ఒక్క చోటు విడువక దేనితోనైనను కప్పబడినది అని అర్థము. ఇట్టివి నిర్మించుట ప్రయాసతో కూడిన పని. ఇందులో అందె వేసిన చేయి Maurice Escher. కుడివైపు పైన ఉండే చిత్రము కూడ ఒక tessellation. రంగులను ఒక నిమిషము మఱచి పోదాము. అప్పుడు ఇందులో y-అక్షము ఒక **ద్విగుణ-అక్షము** (two-fold axis). అంతే కాక ఈ 180 డిగ్రీల భ్రమణముతోబాటు ఒక స్థల పరావర్తనము (translation) కూడ ఉన్నది. అలాగే yz-సమతలమును ఒక దర్పణముగా భావిస్తే, దర్పణ సాదృశ్యము, దానితోబాటు ఒక స్థల పరావర్తనము అని కూడ తలంచ వీలగును. తొమ్మిదవ చిత్రములో కుడివైపు క్రింది భాగము చతుర్గుణ-అక్షమునకు ఒక ఉదాహరణము. ఇందులో Love- Hope-Peace-Joy అనే పదాలు ఉన్నాయి ఆంగ్లములో. పదవ చిత్రములో తెలుగు పదమునందలి తె-అక్షరమునకు 90 డిగ్రీల భ్రమణమును పదేపదే ఇచ్చి తె-అక్షరమును స్వస్తిక ఆకారములో నిర్మించినాను.

ముగింపు: ఈవ్యాసములో మౌలిక సౌష్ఠవాంశములను గుఱించి చర్చించినాము. వీటితో ఇంకేమేమి చేయ వచ్చునో అన్న విషయము తఱువాతి వ్యాసములో.

[మొదటి రెండు చిత్రాలు chatGPT సౌజన్యం, మూడవ నాలుగవ బొమ్మలు రచయిత సృజన. – సం.]

* * *

==

శ్రీ జెజ్జాల కృష్ణమోహనరావు గారు బెంగుళూరు భారతీయ విజ్ఞాన సంస్థ నుంచి భౌతికశాస్త్రం లో Ph.D. పొందారు. ఇండియాలో భౌతిక శాస్త్ర బోధకులుగా, తరువాత అమెరికాలో జాతీయ కాన్సర్ సంస్థలో పరిశోధకులుగా పనిచేసి విరమించారు. ఛందశ్శాస్త్రములో వీరు జగమెరిగిన నిష్ణాతులు. ప్రస్తుత నివాసం అమెరికా మేరీల్యాండ్ రాష్ట్రంలోని ఫ్రెడెరిక్ పట్టణంలో.

==