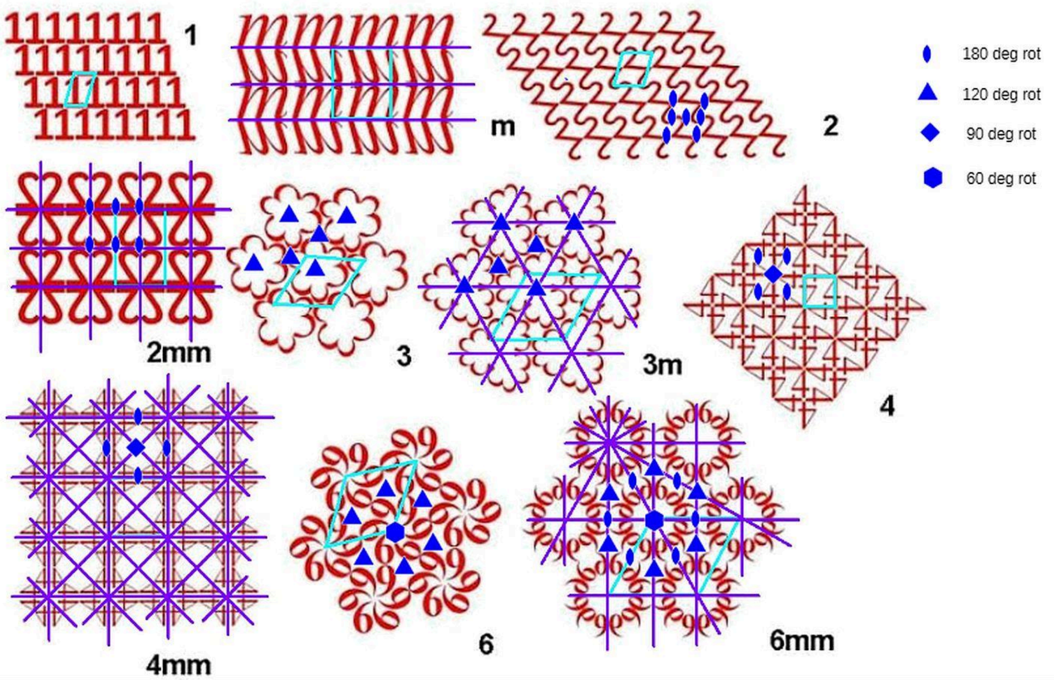
సౌష్ఠవము – 3

శ్రీ జెజ్జాల కృష్ణ మోహన రావు

బిందు సముదాయము

ఒక సౌష్ఠవ ప్రక్రియను (విలోమము, భ్రమణము, దర్పణము) చేసినప్పుడు కనీసము ఒక బిందువైనను మారకుండినప్పుడు, దానిని బిందు సముదాయము అంటారు. విలోమ ప్రక్రియలో కేంద్ర బిందువు, భ్రమణప్రక్రియలో ఒక సరళరేఖ (భ్రమణాక్షము), దర్పణప్రక్రియలో ఒక సమతలము (దర్పణతలము) మారకుండా ఉంటుంది. జనవరిలో వ్రాసిన వ్యాసములో చివర ఒక చిత్రపఠమును మీకు చూపినాను (ఈవ్యాసములో అది మొదటి చిత్రము). దానియొక్క విశేషములను ఇప్పుడు చర్చిద్దాము.



మొదటి చిత్రము: బిందు సముదాయము (రచయిత సౌజన్యము)

మొదటి చిత్రపు పైభాగములో ఎడమవైపునుండి మొదటి చిత్రమును **1** అని తెలిపినాను. ఇందులో, ఇట్టి మిగిలిన చిత్రములలో ఆకాశమురంగులో ఒక గదిని గీచినాను. దీనిని మూలకోష్ఠము లేక ప్రమాణకోష్ఠము అంటారు. ఆంగ్లములో దీనిని unit cell అంటారు. **1** అని వ్రాసిన ఈ సముదాయములో స్థానాంతర పరివర్తనము(translation) తప్ప మరెట్టి సౌష్ఠవము లేదు. అందుకే దీనిని 1 అని పిలిచినాను.

మొదటి చిత్రపు పైభాగములో ఎడమవైపునుండి **m** అను రెండవ చిత్రమును ఇప్పుడు పరిశీలిద్దామా? m అంటే దర్పణము (mirror). ఈ దర్పణమును ఊదారంగులో ఒక సరళరేఖగా చూపించినాను. ఇది xz సమతలములో గలదు. అద్దమువలన ఏర్పడిన బింబప్రతిబింబములను m అనే అక్షరముతో చూపినాను. ఇందులోకూడ ఆకాశపు రంగులో మూలకోష్ఠమును చూపినాను. ఒక m అద్దమువలన తలక్రిందులైన m గా మారుతుంది. పరివర్తనమువలన జనించిన వేఱొక అద్దము ఈతలక్రిందులైన mను మళ్లీ మామూలు mగా మార్చినది.

మొదటి చిత్రపు పైభాగములో మూడవ చిత్రమును **2** అని తెలిపినాను. చిత్రములో కూడ అన్ని చోటులలో ఈ 2 అంకెను ఉపయోగించినాను. ఇందులో z-అక్షము భ్రమణాక్షము. భ్రమణపు విలువ 180^0. ఈ భ్రమణాక్షమును ఊదారంగులో ఒక రేకువలె చూపినాను. ఈరేకులు ఉండే చోటులలో ద్విగుణాక్షములు (two-fold axes) ఉన్నాయి. ఇందులోకూడ మూలకోష్ఠము చూపబడినది. ఇట్టివి చాల చోటులలో గలవు. కాని సౌలభ్యముకోసము ఒక్క చోట మాత్రమే చూపినాను.

మొదటి చిత్రపు మధ్యభాగములో ఎడమవైపున **2mm** బిందు సముదాయము. ఇక్కడ 2 అంటే ద్విగుణాక్షము. mm అంటే రెండు రకములైన దర్పణములు అని అర్థము. ఒక దర్పణము xz సమతలములో, వేఱొకటి yz సమతలములో ఉన్నాయి. అనగా ఇవి ఒకదానికొకటి లంబముగా ఉన్నవి. ఇందులోకూడ 2 అంకెను వాడినాను. ఈ2 అంకె మామూలుగా మఱియు ప్రతిబింబరూపములో ఉన్నాయి. ఇందులో కూడ మూలకోష్ఠము, ఊదారంగులో ద్విగుణాక్షపు గుర్తులను (రేకులవలె), లంబ దర్పణములను చూపినాను.

మొదటి చిత్రపు మధ్యభాగములో రెండవ చిత్రము **3** అనే బిందు సముదాయమును సూచిస్తుంది. ఇందులో 3 అంకెను వాడినాను. భ్రమణాక్షము లంబముగా z దిక్కులో ఉంటుంది. భ్రమణపు విలువ $360 / 3 = 120^0$. ఈ త్రిగుణాక్షపు (three-fold axis) గుర్తు ఊదారంగులో చిన్న త్రిభుజము . అవి ఉండే తావులను, మూలకోష్ఠమును కూడ చూడవీలగును.

మొదటి చిత్రపు మధ్యభాగములో మూడవ చిత్రములో త్రిగుణాక్షముతోబాటు దర్పణములు కూడ ఉన్నాయి (**3m**). ఈదర్పణముల మధ్య కోణము 60^0. భ్రమాణాక్షములు z దిక్కులో, దర్పణములలో z దిక్కు ఉన్నది. అవి x, z ల మధ్యలో ఉన్నాయి. ఇక్కడ కూడ 3 అంకె వాడబడినది.

మొదటి చిత్రపు మధ్యభాగములో నాలుగవ చిత్రములో (**4**) చతుర్గుణాక్షము ఉన్నది. భ్రమణాక్షము z. భ్రమణపు విలువ 90^0. ఇందులో ద్విగుణాక్షములు కూడ ఉన్నాయి. అవి కూడ చూపబడినవి. అంకె 4 వాడబడినది.

మొదటి చిత్రపు దిగువ భాగములో మొదటి చిత్రము **4mm**. ఇందులో భ్రమణాక్షము z దిక్కు. భ్రమణపు విలువ 90^0. ఇందులో దర్పణముల మధ్య కోణము 45^0. ఇందులో కూడ 4 అంకె వాడబడినది. ఇక్కడ ఒక

విషయమును గమనించాలి. నిలువుగా, అడ్డముగా ఉండే అద్దములు 90^0 భ్రమణమువలన జనిస్తాయి. అదే విధముగా కర్ణములలో (diagonal) ఉండే అద్దాలు కూడ 90^0 భ్రమణమువలన కలుగుతాయి. కాని వీటికి నిలువుగా అడ్డముగా ఉండే అద్దాలకు ఏమాత్రము సంబంధము లేదు. దర్పణములు xz, yz, కర్ణములు+z సమతలములో ఉంటాయి.

మొదటి చిత్రపు దిగువ భాగములోని మధ్య చిత్రము **6**. ఇందులో భ్రమణాక్షము షడ్గుణాక్షము (six-fold axis) , z దిక్కు, భ్రమణపు విలువ 60^0 . ఇక్కడ గమనించవలసిన మఱియొక విశేషము ఏమనగా, ఈ షడ్గుణాక్షముతోబాటు, త్రిగుణాక్షములు కూడ ఉన్నాయి. ఇందులో 6 అంకె వాడబడినది.

మొదటి చిత్రపు దిగువ భాగములోని చివరి చిత్రము **6mm**. ఇందులో షడ్గుణాక్షముతోబాటు, త్రిగుణాక్షములు, ద్విగుణాక్షములు ఉన్నాయి. అన్ని అక్షములు z దిక్కులో. దర్పణముల మధ్య కోణము 30^0 . అన్ని దర్పణములలో z దిక్కు ఉన్నది. ఇందులో కూడ 6 అంకె వాడబడినది.

3, 6 మడతల అక్షములు గల వాటిలో మూలకోష్ఠపు దిక్కుల మధ్య కోణము 120^0 . **2mm, 4, 4mm** సముదాయములలో మూలకోష్ఠముల దిక్కుల మధ్య కోణము 90^0 . **1, 2 , m** సముదాయములలో అవి 90^0 కన్న ఎక్కువ.

గణిత సముదాయము

సముదాయ సిద్ధాంతము నేటి విజ్ఞాన శాస్త్రములో విరివిగా వాడబడుచున్నది. భౌతిక, గణిత, రసాయన, సాంకేతిక, మున్నగు విభాగములలో దీని ప్రయోజనములు గలవు. గణితశాస్త్రవేత్త జేమ్స్ న్యూమన్ (James Newman) 1956 ప్రాంతములో "The World of Mathematics" అని పేరు గల నాలుగు సంపుటముల ఒక బృహద్గ్రంథమును రచించెను. అందులో సౌష్ఠవమును గుఱించి క్రింది విధముగా చెప్పియున్నాడు:

> Symmetry establishes a ridiculous and wonderful cousinship between objects, phenomena and theories outwardly unrelated: terrestrial magnetism, women's veils, polarized light, natural selection, the theory of groups, invariants and transformations, the work habits of bees in the hive, the structure of space, vase designs, quantum physics, scarabs, flower petals, X-ray interference patterns, cell division in sea urchins, equilibrium positions of crystals, Romanesque cathedrals, snowflakes, music, the theory of relativity.

> సౌష్ఠవము వస్తువులకు, సంభవములకు, సిద్ధాంతములకు మధ్య ఒక ఊహించరాని చిత్రమైన బాంధవ్యాన్ని కల్పిస్తుంది. అవి భూమిపైన ఉండే అయస్కాంత శక్తి కావచ్చును, లేకపోతే స్త్రీలు ధరించే మేలిముసుగులు, ధ్రువిత (దిక్సూచిత) కాంతి కిరణాలు, ప్రాకృతిక వరణము, గణిత సముదాయముల సిద్ధాంతములు, తేనెపట్టులు, రోదసి సృష్టి, కలశముల ఆకృతులు, క్వాంటం భౌతిక శాస్త్రము, పురుగులు, కీటకములు, పూల రేకుల అమరికలు, ఎక్స్‌రే ప్రతిఫలనములు, ముండ్లతో సముద్రములో ఉండే జీవములు, స్ఫటికముల నిర్మాణము, ఆలయ గోపురాలు, ఘనీభవించిన హిమబిందువులు, సంగీతము, సాపేక్ష సిద్ధాంతము, ఇట్టివి ఇంకెన్నియో!

1830లో గాల్వా (Galois) దీనిని మొట్టమొదట ఆవిష్కరించెను.పిదప Camille Jordan, Felix Klein, Sophus Lie వంటివారు ముఖ్యమైన పరిశోధనలను చేసినారు. ఇప్పుడు ఎన్నో రంగాలలో ఈ సముదాయ సిద్ధాంతము వాడబడుచు ప్రముఖ పాత్ర వహించుచున్నది.

పైన వివరించిన బిందు సముదాయములు గణిత శాస్త్రరీత్యా కూడ సముదాయములే. గణిత శాస్త్ర సముదాయమునకు నిబంధనలు:

(1) ఒక సముదాయములో కొన్ని అంశములు లేక బీజములు (elements) ఉంటాయి.

(2) సముదాయము లోని రెండు అంశములు తీసుకొని వాటి మధ్య ఒక సముదాయ క్రియ (operation) చేయబడును. దీనికి గుణకారమని కూడా పేరు. గుణకారమంటే ఎక్కాల గుణకారమనే (హెచ్చవేత) కాదు. అది హెచ్చవేత కావచ్చు, కూడిక కావచ్చు, మరేదైనా కావచ్చు. దాని సాధారణ నామము గుణకారం. దానిని ఒక చుక్కతో (.) సూచిస్తాం. ఈ క్రియ ఫలితముగా వచ్చిన అంశము సముదాయములోని ఒక అంశమే అయి ఉంటుంది. అదీ విశేషం. దీనికి పరిపూర్తి (closure property) అని పేరు.

(3) సముదాయములోని అంశములలో ఒక అంశమునకు మూలతత్వము (identity element E) అని పేరు.

(4) ప్రతి అంశమునకు ఒక విలోమాంశము (inverse element) కూడ ఉంటుంది. అంశము a అయి, విలోమాంశము a^{-1} అయితే $a . a^{-1} = E$.

(5) క్రియలో అంశముల వరుస చాలా కీలకం. అన్ని సందర్భములలో a . b ఫలితము b . a ఫలితము ఒకటిగా ఉండనక్కర లేదు.

సముదాయపు భావనలను అర్థం చేసుకోవడానికి ఒక ఉదాహరణ తీసుకొందాం. అది మొదటి చిత్రములోని గణిత బిందు సముదాయము 4వ బొమ్మ. ఇందులోని అంశములు: 0, 90, 180, 270 డిగ్రీల భ్రమణములు. మూలతత్వము (identity element): 0^0. ఇందులో గుణకారం క్రియ (operation) కూడిక.

భ్రమణ క్రియ రెండు భ్రమణములు, ఉదా. $90, 180^0$. వీటి రెండింటిని చేసినప్పుడు మనకు 270^0 భ్రమణము వచ్చును. ఈ ప్రక్రియ కూడిక: $90 + 180 = 270^0$; అదే విధముగ $180 + 90$ కూడా 270^0. అనగా, ఇక్కడ a . b = b . a. ఇది commutative operation, అనగా వినిమయ ప్రక్రియ. అనగా క్రియలను తిప్పి చేసినను అదే ఫలితము వచ్చును.

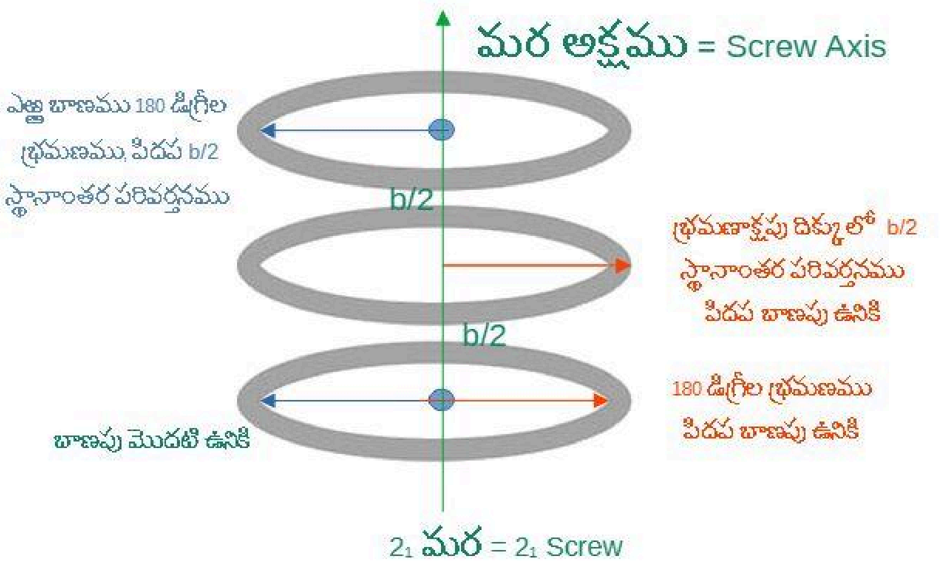
90 + 270 = 270 + 90 = 0, అనగా 90 కి 270 విలోమాంశము, 270 కి 90 విలోమాంశము.

ఈ సముదాయమునకు గుణకార క్రియ పట్టికను క్రింద ఇస్తున్నాను:

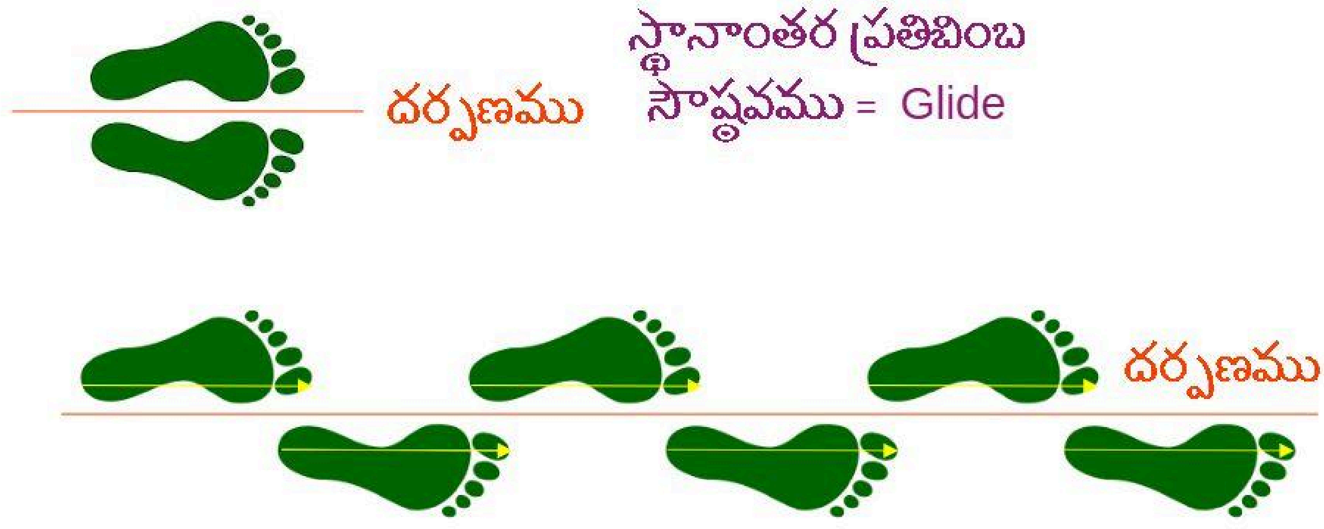
	0^0	90^0	180^0	270^0
0^0	0	90	180	270
90^0	90	180	270	0
180^0	180	270	0	90
270^0	270	0	90	180

మర లేక Screw

భ్రమణము తర్వాత ఒక స్థానాంతర పరివర్తనము (translation) జరిగితే దానిని మర (Screw) అంటారు. మర అక్షపు నిడివి b అనుకొందాము, భ్రమణాక్షము y అనుకొందాము. అప్పుడు భ్రమణపు, స్థానాంతరపు విలువలు ఈ విధముగా ఉంటాయి: ద్విగుణాక్షము - 180^0, b/2; త్రిగుణాక్షము - 120^0 b/3, 240^0 2b/3; చతుర్గుణాక్షము - 90^0 b/4, 180^0 b/2 , 270^0 3b/4; షడ్గుణాక్షము - 60^0 b/6, 120^0 b/3 , 180^0 b/2, 240^0 2b/3, 300^0 5b/6. 2_1 మరను రెండవ చిత్రములో చూడవచ్చును. ఈ మరలు ఎప్పుడు right-handed screws లేక సవ్యమైన మరలు మాత్రమే. దక్షిణ భారతదేశములో ఎక్కువగా చీరను సవ్యమైన పద్ధతిలో ధరిస్తారు.



రెండవ చిత్రము: మర లేక Screw (రచయిత సౌజన్యము)



మూడవ చిత్రము: స్థానాంతర ప్రతిబింబ సౌష్ఠవము లేక జారుడు (రచయిత సౌజన్యము)

స్థానాంతర ప్రతిబింబ సౌష్ఠవము లేక జారుడు Glide

మరలో ఏవిధముగా భ్రమణము, స్థలములో మార్పు సంభవిస్తుందో, అదే విధముగా ఈ జారుడులో దర్పణములోని ప్రతిబింబముతోబాటు స్థలములో మార్పు సంభవిస్తుంది. దీనిని మూడవ చిత్రములో గమనించవచ్చును. పై భాగములో మొట్టమొదట దర్పణములో ఎడమపాదము, దాని ప్రతిబింబము కుడిపాదము గలవు. ఈకుడి పాదమును x దిక్కులో a/2 దూరము జరిపితే క్రింది భాగము లభిస్తుంది. ఇలా పదేపదే చేసినప్పుడు మొత్తము చిత్రము లభిస్తుంది. స్థలాంతరపు విలువ a/2 కాబట్టి దీనిని a-glide లేక a-దిశలో జారుడు అంటారు.

* * *

==

శ్రీ జెజ్జాల కృష్ణమోహనరావు గారు బెంగుళూరు భారతీయ విజ్ఞాన సంస్థ నుంచి భౌతికశాస్త్రం లో Ph.D. పొందారు. ఇండియాలో భౌతిక శాస్త్ర బోధకులుగా, తరువాత అమెరికాలో జాతీయ కాన్సర్ సంస్థలో పరిశోధకులుగా పనిచేసి విరమించారు. ప్రస్తుత నివాసం అమెరికా మేరీల్యాండ్ రాష్ట్రంలోని ఫ్రెడెరిక్ పట్టణంలో.

==

జనవరి సంచికలోని సౌష్ఠవం వ్యాసం గురించి శ్రీ వేమూరి వేంకటేశ్వరరావు గారు ఇలా అడుగుతున్నారు:

శ్రీ జెజ్జాల వారి వ్యాసంలో, 39వ పేజీలో dextral, sinistral అన్న మాటల అర్థాలు తారుమారయినట్లు అనిపిస్తోంది. సరి చూడగలరు. నా నిఘంటువులో ఉన్న అర్థాలు దిగువ చూపుతున్నాను. పొరపాటు నాదే అయితే, సరిదిద్దుకుంటాను!

- dextral, adj. (1) కుడిచేతివైపు; దక్షిణావర్త; (2) కుడిచేతి వాటం; (3) అనుశంఖ; శంఖం యొక్క మట్టం నుండి శిఖరానికి వెళ్లేటప్పటి సర్పిలాకృతి; (ant.) sinistral;

- sinistral, adj. ఎడమవైపు; వామావర్త;

దానికి శ్రీ జెజ్జాల కృష్ణమోహన్ రావు గారి సమాధానం:

సామాన్యముగా నిఘంటువులలో dextral అంటే దక్షిణావర్తము అని అర్థము, sinistral అంటే వామావర్తము లేక ఉత్తరావర్తము. వామావర్త శంఖములలో బోలుగా ఉండే భాగము ఎడమవైపు, దక్షిణావర్త శంఖములలో బోలుగా ఉండే భాగము కుడివైపు ఉంటుంది. ఇదియే శాస్త్రీయపరముగా వివరణ.

కాని భారతదేశములో అరుదైన ఈ sinistral శంఖములను దక్షిణావర్త శంఖములని పిలుస్తారు. sinistral శంఖములలో సుడులు anti-clockwise దిశలో, dextral శంఖములలో అవి clockwise అనగా గడియారపు ముల్లు తిరిగే విధముగా ఉంటుంది. విజ్ఞాన శాస్త్రములో clockwise దిశ అపసవ్యము (negative), anti-clockwise దిశ సవ్యము (positive). మనము చేసే ప్రదక్షిణము నేడు అనుసరించే శాస్త్రపరముగా అపసవ్యము. అందుకే ఈ తారుమారు శబ్దాలు జనించాయేమో?

విష్ణువు ధరించిన పాంచజన్యము దక్షిణావర్త (sinistral) శంఖము. నత్తలలో 90 నుండి సుమారు 100 శాతము వఱకు dextral శంఖములే ఉంటాయి. 0.1 నుండి 10 శాతము వఱకు sinistral శంఖములు ఉంటాయి.